ВЫХОДИТ РАЗ В ДВЕ НЕДЕЛИ

Рекомендуемая розничная цена: 279 руб.
Розничная цена: 49,90 грн, 990 тенге

Занимательные ГОЛОВОЛОМКИ

КОЛЛЕКЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ИГР ОТ DeAGOSTINI

32

Треугольный солитер

ISSN 2225-1782
00032
9 772225 178772

DeAGOSTINI

занимательные ГОЛОВОЛОМКИ

КОЛЛЕКЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ИГР ОТ DeAGOSTINI

В этом выпуске:

Математическая вселенная

Постулат о параллельности прямых Неевклидова геометрия возникла в результате отрицания пятого постулата Евклида. Это требовало определенной смелости, ведь в течение двух тысяч лет весь мир, в котором мы живем, описывался с помощью законов евклидовой геометрии. С учетом этого может показаться, что неевклидова геометрия — не более чем математическая игра. Однако со временем стало понятно, что это мощное средство, которое можно использовать не только в математике, но и во многих разделах современной физики.

Блистательные умы

Коперник геометрии Труд Лобачевского можно считать революционным не только с математической, но и с философской точки зрения, так как он изменил парадигмы геометрии, которые использовались на протяжении двух тысяч лет. Математик работал над созданием новой геометрии больше 20 лет, опубликовав результаты своих трудов в «Записках физико-математического отделения» Казанского университета. Однако долгое время эта работа оставалась незамеченной как в России, так и в Европе.

Математика на каждый день

Построение с помощью циркуля и линейки Три задачи на построение с помощью циркуля и линейки, с которыми пытались справиться математики более двух тысяч лет, не имеют решения: задача о квадратуре круга, задача о трисекции угла и задача об удвоении куба. Многие до сих пор упорно бьются над ними. Не так давно Европейская патентная организация официально прекратила прием патентных заявок, связанных с этим вопросом. Однако мир по-прежнему полон непризнанных гениев, которым якобы удалось решить эти задачи.

Математические задачки

Запутанный рассказ У Хью, Ламберта и Нормана был выбор — решить задачку про них самих, придуманную их отцом, или просто вспомнить, сколько им было лет, когда отцу пришла в голову мысль ежегодно дарить каждому из сыновей столько гиней, сколько лет ему исполняется в текущем году. Нам же придется рассчитывать только на свои математические способности.

Головоломки

Треугольный солитер Многие игры существуют в большом количестве вариантов и версий, некоторые из которых по праву можно назвать отдельными играми. Таков и треугольный солитер, отличающийся от обычного солитера тем, что здесь доска имеет треугольную форму, из-за чего в игре возникает множество новых и интересных ситуаций. Цель и правила обеих игр одинаковы.

«ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ГОЛОВОЛОМКИ»
Издание выходит раз в две недели
Выпуск № 32, 2013
РОССИЯ

ИЗДАТЕЛЬ, УЧРЕДИТЕЛЬ, РЕДАКЦИЯ:
ООО «Де Агостини», Россия
ЮРИДИЧЕСКИЙ АДРЕС: 105 066, г. Москва,
ул. Александра Лукьянова, д.3, стр.1
Письма читателей по данному адресу не принимаются.

ГЕНЕРАЛЬНЫЙ ДИРЕКТОР: Николаос Скилакис
ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: Анастасия Жаркова
ВЫПУСКАЮЩИЙ РЕДАКТОР: Варвара Степановская
ФИНАНСОВЫЙ ДИРЕКТОР: Наталия Василенко
КОММЕРЧЕСКИЙ ДИРЕКТОР: Александр Якутов
МЕНЕДЖЕР ПО МАРКЕТИНГУ: Михаил Ткачук
МЛАДШИЙ МЕНЕДЖЕР ПО ПРОДУКТУ:
Любовь Мартынова

Уважаемые читатели!
Для вашего удобства рекомендуем приобретать выпуски в одном и том же киоске и заранее сообщать продавцу о вашем желании покупать следующие выпуски коллекции.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор) ПИ № ФС77-43310 от 28.12.2010 г.

Для заказа пропущенных номеров
и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт
www.deagostini.ru

По остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной «горячей линии» в России:
8-800-200-02-01

Телефон «горячей линии» для читателей Москвы:
8-495-660-02-02

АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ:
Россия, 105066, г. Москва, а/я 13, «Де Агостини»,
«Занимательные головоломки»

РАСПРОСТРАНЕНИЕ:
ООО «Бурда Дистрибьюшен Сервисиз»

УКРАИНА
ИЗДАТЕЛЬ И УЧРЕДИТЕЛЬ:
ООО «Де Агостини Паблишинг», Украина
ЮРИДИЧЕСКИЙ АДРЕС: 01032, Украина,
г. Киев, ул. Саксаганского, д. 119
ГЕНЕРАЛЬНЫЙ ДИРЕКТОР: Екатерина Клименко

Свидетельство о государственной регистрации печатного СМИ Министерства юстиции Украины КВ № 17502-6252Р от 01.03.2011

АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ:
Украина, 01033, г. Киев, а/я «Де Агостини»,
«Занимательные головоломки»
Україна, 01033, м. Київ, а/с «Де Агостіні»

Для заказа пропущенных номеров
и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт
www.deagostini.ua

По остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной «горячей линии» в Украине:
0-800-500-8-40

БЕЛАРУСЬ
ИМПОРТЕР И ДИСТРИБЬЮТОР В РБ: ООО «Росчерк», 220037, г. Минск, ул. Авангардная, д. 48а, литер 8/к, тел./факс: +375 17 2-999-260.

Телефон «горячей линии» в Беларуси:
+375 17 279-87-87 (пн-пт, 9.00 — 21.00)

АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ: Республика Беларусь, 220040, г. Минск, а/я 224, ООО «Росчерк», «Де Агостини», «Занимательные головоломки»

КАЗАХСТАН
РАСПРОСТРАНЕНИЕ: ТОО «КГП «Бурда-Алатау-Пресс»

РЕКОМЕНДУЕМАЯ РОЗНИЧНАЯ ЦЕНА: 279 руб.
РОЗНИЧНАЯ ЦЕНА: 49,90 грн, 990 тенге

ОТПЕЧАТАНО В ТИПОГРАФИИ: G. Canale & C. S.p.A.
Sos. Cernica 47, Bucuresti, Pantelimon – Ilfov, Romania.

ТИРАЖ: 68 000 экз.

Издатель оставляет за собой право изменять последовательность номеров и их содержание.

Издатель оставляет за собой право увеличить рекомендуемую цену выпусков.

Неотъемлемой частью каждого выпуска является приложение.

ISSN 2225-1782

ДАТА ВЫХОДА В РОССИИ: 23.04.2013

Пятый постулат Евклида, один из наиболее противоречивых в истории математики, оставался предметом споров более двух тысяч лет.

Неевклидова геометрия

Постулат о параллельности прямых

Главные герои этой истории — постулаты Евклида, один из которых, пятый, как считалось, можно было доказать, используя остальные четыре. Эту задачу безуспешно пытались решить многие выдающиеся математики разных эпох. Гаусс (1777–1855), один из тех, кто лучше всего понял суть проблемы, начал работать над ней в возрасте 15 лет. Когда ему исполнилось 36, ему все еще не удалось добиться сколько-нибудь значимого результата. Он писал: «В теории параллельных прямых мы не ушли дальше, чем Евклид. Это постыдно для математиков». Несмотря на это, его единодушно причисляют к создателям неевклидовой геометрии вместе с Бойяи и Лобачевским.

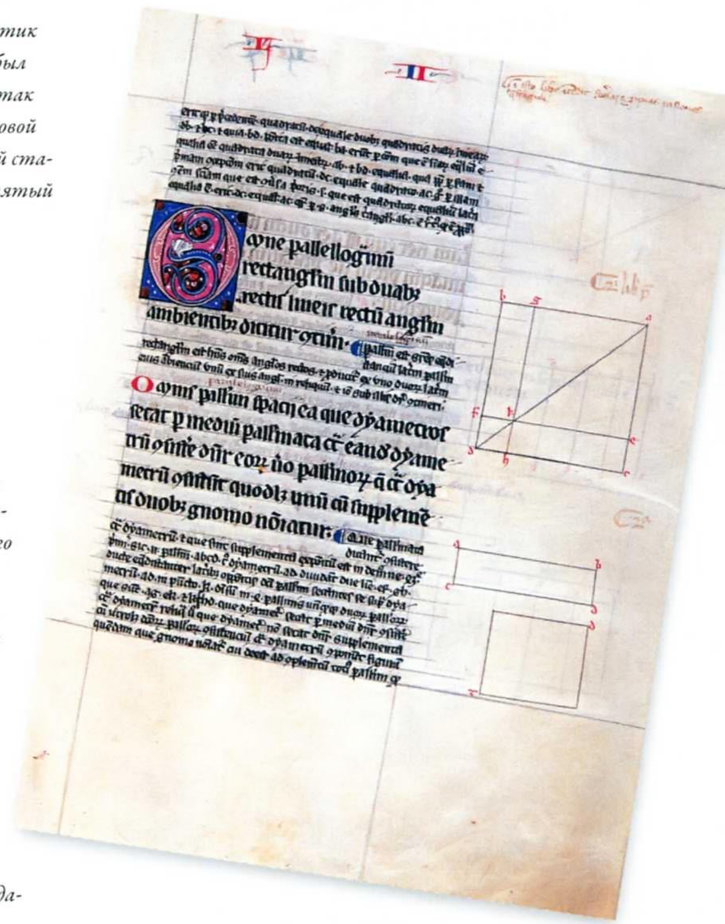
Неевклидова геометрия возникла в результате отрицания пятого постулата. Это требовало определенной смелости: не будем забывать, что в течение двух тысяч лет весь мир, в котором мы живем, описывался с помощью законов евклидовой геометрии. С учетом этого может показаться, что неевклидова геометрия — не более чем математическая игра. Однако со временем стало понятно, что неевклидова геометрия — мощное средство, которое можно использовать не только в математике (так, с ее помощью удалось внести важный вклад в теорию динамических систем, автоморфных функций и теорию чисел), но и во многих разделах современной физики.

▲ Немецкий математик Карл Фридрих Гаусс был одним из создателей так называемой неевклидовой геометрии, в которой ставится под сомнение пятый постулат Евклида.

Геометрия Евклида

Основные понятия — точка, прямая, плоскость, а также отношения между ними, от простейших до самых сложных, были систематизированы и упорядочены в период с 330 по 275 г. до н. э. в одной из наиболее издаваемых, наряду с Библией, книг в истории человечества. Этой книгой были «Начала» (греч. Στοιχεῖα) Евклида, в трех томах которой содержались все знания о геометрии того времени. Геометрия Евклида стояла на трех столпах: аксиомах, постулатах и теоремах. Теоремы — это утверждения, которые не являются очевидными и которые нужно доказать с помощью логических рассуждений, исходя из аксиом и постулатов. Евклид сформулировал 23 аксиомы и пять постулатов, на основе которых доказывались все теоремы. Важно проводить грань между аксиомами и постулатами, так как без этого нельзя понять суть изложенного в «Началах». Аксиома не требует доказательства, так как она ясна и очевидна. Например, первая аксиома «Начал» звучит так: «Точка есть то, что не имеет частей». Постулат, напротив, — это утверждение, которое не столь очевидно, как аксиома, но считается истинным без доказательства. Первые четыре постулата Евклида таковы:

1. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.
2. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.
3. Из всякого центра всяким раствором может быть описан круг.
4. Все прямые углы равны между собой.

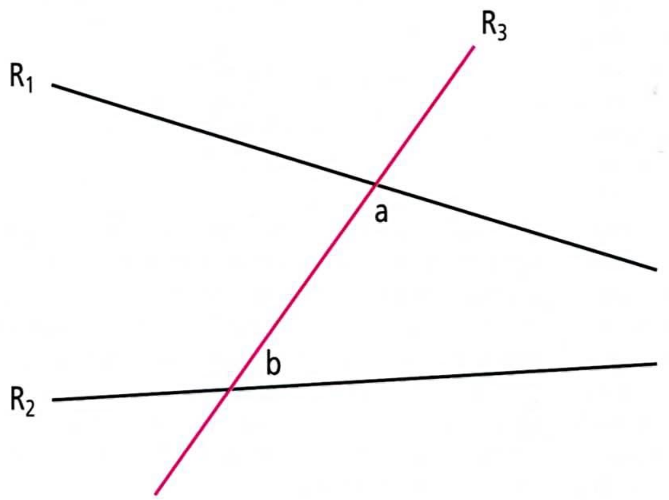


► Евклид выполнил титанический труд, собрав воедино все знания о геометрии своего времени (IV–III вв. до н. э.) в трактате, который пользовался огромной популярностью во все времена — в «Началах» (Στοιχεῖα). На рисунке изображена страница рукописи под названием Elementa geometriae, датируемой XIV веком.

Пятый постулат

Пятый постулат «Начал» Евклида, который не столь лаконичен и прост, как остальные четыре, звучит так: «Если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, меньшие двух прямых, то, продолженные неограниченно, эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых».

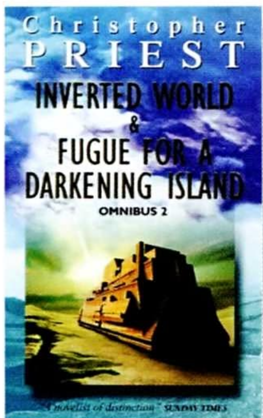
Допустим, что прямая R_3 пересекает две другие прямые, R_1 и R_2.



Внутренние углы, меньшие двух прямых, о которых упоминается в постулате, обозначены буквами *a* и *b*. Согласно пятому постулату, если мы продолжим прямые R_1 и R_2, они пересекутся в правой части рисунка.

Геометры всегда обращали внимание, что пятый постулат не столь прост, и, что более важно, не столь очевиден, как предыдущие четыре. Это понимал даже сам Евклид, пытаясь избежать его использования: впервые он применяется только в доказательстве предложения 29 книги I. Он пытался построить всю геометрию, не используя пятый постулат, из-за чего иногда говорят, что Евклид был первым создателем неевклидовой геометрии.

Пятый постулат изначально вызывал некоторые сомнения. Верен ли он? И если да, то является ли он действительно независимым постулатом или это теорема, которую можно доказать, используя четыре остальных постулата?



▲ *Неевклидова геометрия лежит в основе сюжетов научно-фантастических книг, например романа «Опрокинутый мир» Кристофера Приста. Действие романа происходит в мире, где действуют законы гиперболической геометрии.*

Альтернативы

Целью исследований, посвященных пятому постулату, было найти другую его формулировку, более лаконичную и интуитивно понятную и в то же время полностью эквивалентную исходной. Среди предложенных альтернативных постулатов выделяются следующие:

— Прямая, параллельная данной, отстоит от нее на постоянное расстояние (Прокл Диадох, 410–485).

— Существуют подобные (но не равные) треугольники, то есть треугольники, углы которых равны, а стороны различаются (Валлис, 1616–1703).

— Существует хотя бы один прямоугольник, то есть четырехугольник, у которого все углы прямые (Саккери, 1667–1733).

— Через каждую точку внутри острого угла всегда можно провести прямую, пересекающую обе его стороны (Лежандр, 1752–1833).

— Сумма углов треугольника равна двум прямым углам (Лежандр).

— Существует треугольник сколь угодно большой площади (Гаусс, 1777–1855).

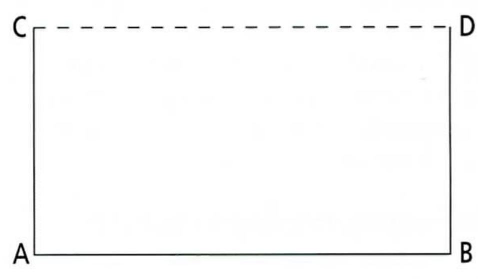
— В плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной (Плейфэр, 1748–1819).

Последний вариант, сформулированный шотландским математиком Джоном Плейфэром в 1795 году, является наиболее известным и обычно используется в учебниках. Пятый постулат часто называют постулатом о параллельных прямых.

Подробное описание всех попыток доказать независимость пятого постулата займет объемный том, в котором будут упомянуты самые известные математики всех времен. Их усилия, несомненно, достойны похвалы. Некоторые были более отважны, чем остальные, но все попытки неизменно оканчивались неудачей. Полученные доказательства часто основывались на каком-либо свойстве, которое считалось очевидным, но в действительности было эквивалентно пятому постулату. Были и те, кто, подобно Лежандру, умирали, так и не узнав, что найденное ими заветное доказательство содержит ошибку. Эти ошибки было весьма непросто обнаружить, что становилось причиной ожесточенных споров.

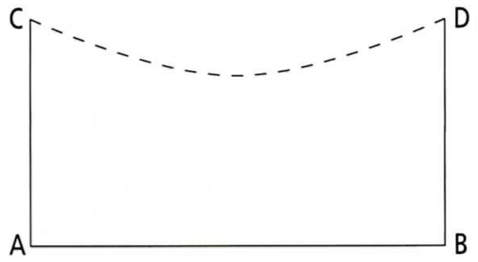
Необычный прямоугольник, или гипотеза о прямом угле

Посмотрим на следующий рисунок, на котором изображена фигура, похожая на прямоугольник.

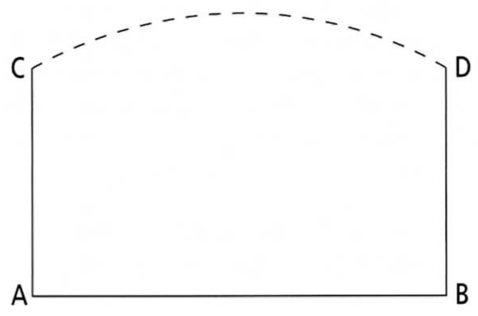


Мы говорим «похожая», так как мы не знаем, какую форму будет иметь сторона CD, обозначенная пунктирной линией. Нам известно, что углы в вершинах A и B прямые (равны 90°), а стороны AC и BD равны. Можно доказать, что углы при вершинах C и D равны, причем это можно сделать, не используя пятый постулат. Далее следует наиболее важный этап рассуждений: если мы примем пятый постулат за истину, то сможем доказать, что углы при вершинах C и D прямые. Мы также сможем доказать обратное: если мы будем считать эти углы прямыми, то сможем доказать пятый постулат. Таким образом, предположение о том, что углы C и D прямые, эквивалентно пятому постулату. Эта гипотеза известна как гипотеза прямого угла.

Если мы будем считать эту гипотезу истинной, то с ее помощью сможем выстроить всем известную евклидову геометрию. Однако существуют еще две возможности, которые также следует рассмотреть. Нам известно, что два рассматриваемых угла равны. Однако, они могут быть меньше 90°. Это предположение называется гипотезой острого угла:



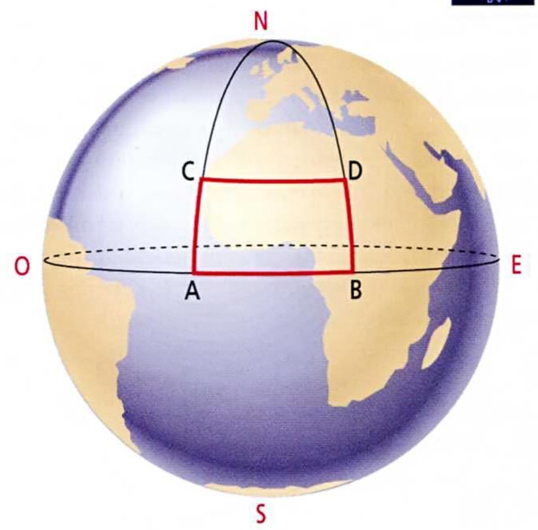
Эти углы могут быть и больше 90° — это предположение называется гипотезой тупого угла:



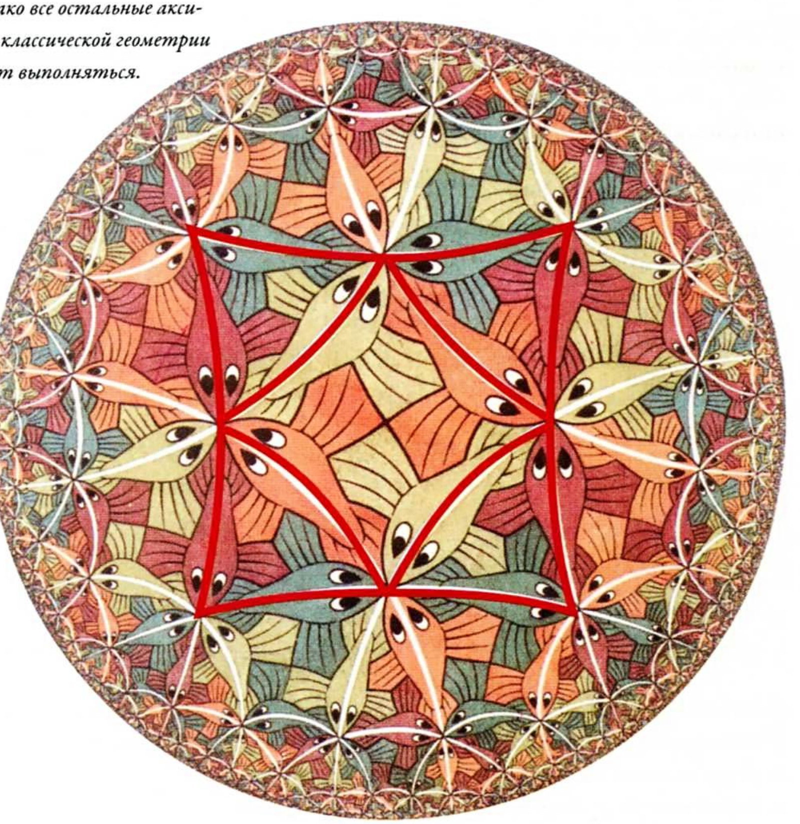
В зависимости от того, какую из этих трех гипотез мы будем считать истинной, мы получим три различных геометрии: гиперболическую, эллиптическую и евклидову. Как мы покажем далее, евклидова геометрия не обязательно является наиболее «реалистичной» из них.

Геометрия мореплавателей

Чтобы представить, как может выглядеть геометрия, основанная на гипотезе острого угла, поместим вышеописанный прямоугольник на поверхность сферы. Если бы земной шар имел форму идеальной сферы, можно было бы представить, что наш прямоугольник находится на поверхности Земли так, что его основание AB расположено вдоль большого круга сферы — экватора.



Когда мы соединяем точки A и B отрезком прямой на плоскости, мы проводим кратчайшую линию между этими точками. Кратчайшей линией на поверхности сферы будет дуга большого круга (разумеется, меньшая из двух дуг, соединяющих данные точки). Общее название подобных кратчайших линий — геодезические. Геодезическими линиями на плоскости являются прямые, на сфере — большие круги.



▼ *На гравюре М. Эшера «Предел — круг III» за узором из множества рыб скрывается великолепный пример из гиперболической геометрии. Круг, изображенный на рисунке, называется кругом Пуанкаре и представляет собой модель неевклидовой геометрии. Прямые линии представлены в виде дуг окружности, перпендикулярных границе круга. В мире, где действуют законы гиперболической геометрии, расстояние можно определить с помощью гиперболического синуса и косинуса так, что «прямые» будут иметь будут иметь бесконечную длину. Через точку, не лежащую на данной прямой, будет проходить более одной прямой, параллельной данной, а сумма углов треугольника будет меньше 180°. Однако все остальные аксиомы классической геометрии будут выполняться.*

Проведем два больших круга, проходящие через Северный полюс и точки A и B. Эти большие круги образуют прямые углы с экватором. Мы построили криволинейный треугольник ANB. Проведем другой большой круг, который пересечет оба меридиана в точках C и D так, что расстояния AC и BD будут одинаковы. Мы изобразили вышеописанный прямоугольник на поверхности сферы. Углы при вершинах C и D равны, но больше 90°. Таким образом, выполняется гипотеза тупого угла.

В этой неевклидовой геометрии, которую математики называют эллиптической, две прямые (геодезические линии) всегда пересекаются в двух точках. Для мореплавателя плоскость евклидовой геометрии — лишь идеализация, так как поверхность, по которой плывет корабль, по форме намного ближе к сфере. Поэтому кратчайший путь между двумя точками будет проходить вдоль большого круга. В этом случае, как мы уже говорили, неевклидова геометрия будет более реалистичной.

Четырехугольник, который мы рассмотрели, называется четырехугольником Саккери. Джованни Джироламо Саккери (1667–1733), иезуит, возглавивший кафедру математики в университете Павии, первым предположил, что пятый постулат Евклида может быть ложным. Взяв его за основу рассуждений, Саккери попытался прийти к противоречию. Полученные им результаты могли бы представлять огромную важность (именно это и произошло много лет спустя), однако сам Саккери не признавал их, посчитав абсурдными.

▸ *Памятник Фаркашу Вольфгангу Бойяи (1775–1856) и его сыну Яношу Бойяи (1802–1860) напротив института в городе Тыргу-Муреш, где они учились. Отец, который изучал математику в Гёттингене, был другом Карла Фридриха Гаусса и автором работы, пошатнувшей основы евклидовой геометрии. Его сын Янош, который изучал военное инженерное дело в Вене, завершил труд отца и стал одним из ведущих венгерских математиков своего времени.*

Тем не менее, его работы стали отправной точкой самых удивительных и революционных исследований в истории математики, результатом которых стало появление неевклидовой геометрии.

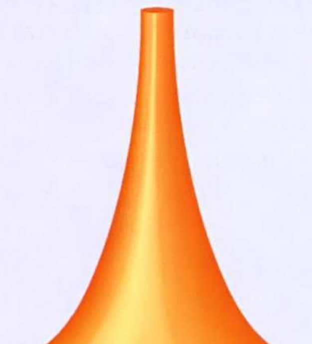
Рождение неевклидовой геометрии

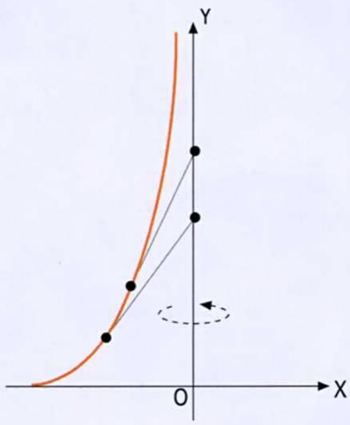
Описать историю развития неевклидовой геометрии непросто, поэтому мы изложим ее лишь в общих чертах. Первым математиком, который обратил внимание, что пятый постулат не зависит от остальных и что его отрицание может привести к появлению новой геометрии, был Гаусс (1777–1855).

Однако он никогда не публиковал свои соображения по этому поводу и никому не рассказывал о них, боясь, что его не поймут. Венгерский математик Фаркаш Вольфганг Бойяи (1775–1856) был близким другом Гаусса и потратил много сил на изучение аксиомы о параллельности прямых, хотя ему не удалось достичь значимых результатов. Его сын Янош Бойяи (1802–1860) не послушался отца, который советовал ему отказаться от решения этой непростой задачи, и посвятил 20 лет жизни написанию работы, которую многие математики считают маленьким шедевром. Он отправил статью, которая едва насчитывала 26 страниц, отцу, который попросил у него разрешения опубликовать ее в качестве приложения к одному из своих трудов. В письме другу Гаусс так охарактеризовал Яноша и его труд: «Я считаю юного геометра Бойяи гением первой величины, поскольку все полученные им результаты согласуются с теми, что я получил уже давно». Янош был отчасти разочарован подобным отношением, а также тем, что, как оказалось, его результаты уже опубликовал русский математик Лобачевский, и решил оставить математику.

Построение псевдосферы

Псевдосфера (вверху слева) — это поверхность вращения, по форме напоминающая рупор.



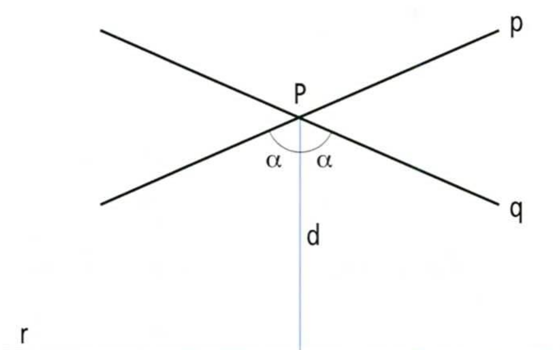


Она строится вращением кривой, которая называется трактрисой — так называемой кривой погони (см. рисунок справа). Эта кривая обладает особым свойством: длина отрезка касательной от точки касания до пересечения с осью OY является постоянной. Псевдосфера получается вращением этой кривой вокруг оси OY (вверху справа).

Геометрия Лобачевского

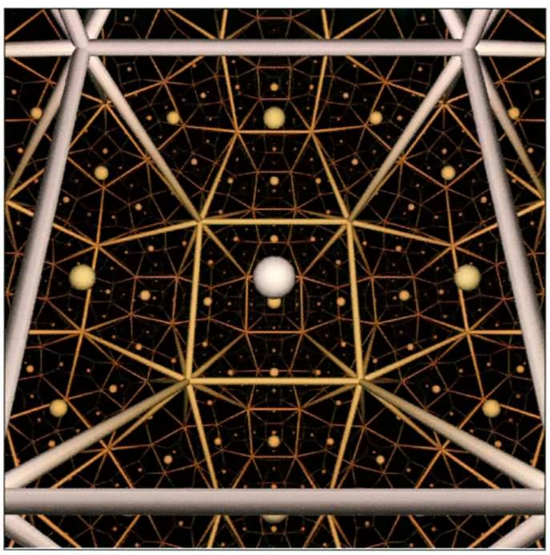
Николай Лобачевский (1793–1856) исходил из того, что доказать пятый постулат нельзя, и создал новую геометрию на основе другого постулата, который звучит так: «Через точку P, не лежащую на данной прямой r, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие ее». Он получил удивительный результат: множество прямых, проходящих через точку P, делится на два класса: прямые первого класса пересекают r, прямые второго класса — нет.

▲ *Эта псевдосфера установлена возле института города Тыргу-Муреш (основан в 1557 году), где преподавал Фаркаш Вольфганг Бойяи и учился его сын Янош.*



Эти два класса прямых не содержат общих элементов. Множество прямых, не пересекающих r, образует пучок, ограниченный двумя крайними прямыми p и q (они называются параллельными), которые также не пересекают r и образуют границу этого множества. Таким образом, если мы проведем из точки P перпендикуляр к прямой r, расстояние d и угол α будут определять два класса прямых: прямые первого класса образуют угол, меньший α, и пересекают r; прямые второго класса, которые не пересекают r, образуют угол, больший α. В геометрии Лобачевского через точку, не лежащую на данной прямой, проходит бесконечное множество прямых, параллельных данной.

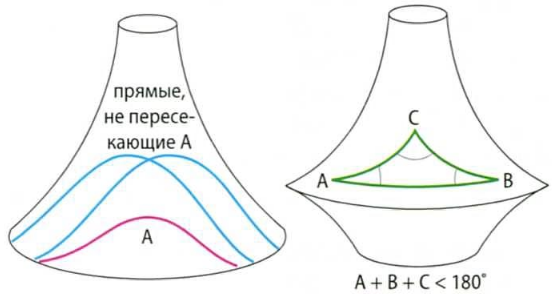
▼ *Гиперболическая вселенная, изображенная математиком Мартином Бюхером.*



Далее Лобачевский создал неевклидову тригонометрию и определил правила решения треугольников и расчета площадей и объемов. Одной из наиболее интересных особенностей новой тригонометрии было то, что с уменьшением величин новые тригонометрические функции всё меньше отличались от традиционных. Иными словами, евклидову геометрию можно считать предельным случаем геометрии Лобачевского.

Заключение

Как мы говорили в самом начале, неевклидова геометрия так и осталась бы математической игрой, если бы в последующих исследованиях она не была применена для решения конкретных физических задач. В 1868 году итальянский математик Эудженио Бельтрами (1835–1900) построил псевдосферу — физическую модель, на которой выполнялись законы геометрии Лобачевского. Позднее Феликс Клейн (1849–1952) обобщил эту модель и определил на ней проективные преобразования.

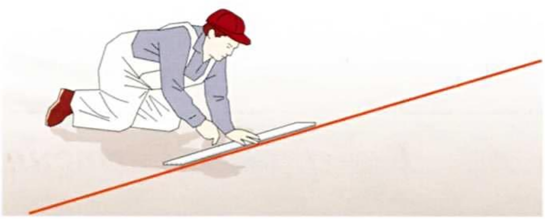


► *На псевдосфере сумма углов треугольника не равна 180° (справа). Кроме того, через одну точку можно провести две прямые, параллельные данной (слева).*

В итоге было показано, что гиперболическая геометрия столь же непротиворечива, что и евклидова (иными словами, если гиперболическая геометрия содержит противоречие, то и евклидова геометрия тоже).

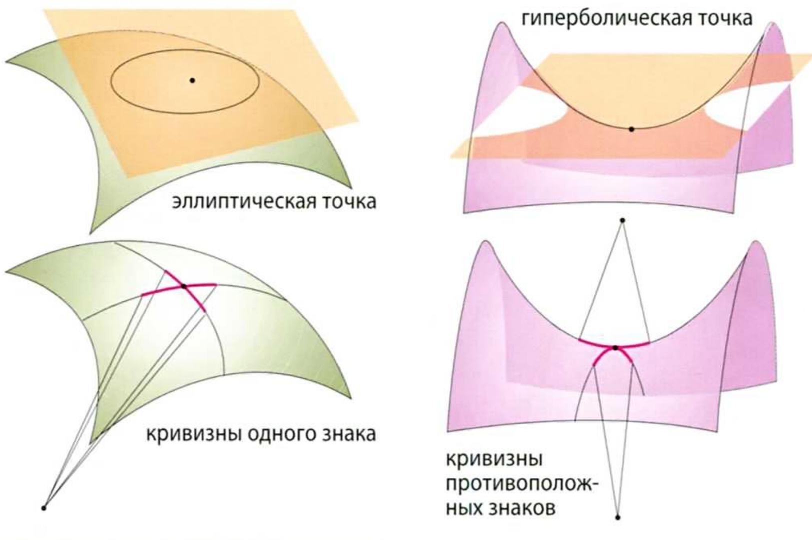
Для относительно малых расстояний евклидова и неевклидова геометрия практически

Геометрия	Создатели	Постулаты	
Евклидова	Евклид	Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной.	Сумма углов треугольника равна 180°.
Гипер-болическая	Гаусс Бойяи Лобачевский	Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести бесконечно много прямых, параллельных данной.	Сумма углов треугольника меньше 180°.
Эллипти-ческая	Риман	Через точку, не лежащую на данной прямой, нельзя провести ни одной прямой, параллельной данной.	Сумма углов треугольника больше 180°.



Восприятие геометрических свойств пространства, в котором мы находимся, часто зависит от выбранной точки зрения. Так, если мы измерим расстояние с помощью линейки, приложив ее к полу, то увидим, что поверхность пола плоская. Если же мы отдалимся от Земли на достаточное расстояние, то увидим, что в действительности поверхность земного шара имеет форму сферы.

эквивалентны. Однако, если речь идет о расстоянии между небесными телами или о некоторых разделах современной физики (теории относительности или теории распространения волн), неевклидова геометрия оказывается намного точнее.



На поверхности с эллиптической точкой (слева) сечением плоскости вблизи точки будет эллипс. В этом случае оба радиуса кривизны расположены по одну сторону от плоскости. Для гиперболической точки (справа) сечением будет гипербола, а радиусы кривизны будут располагаться по разные стороны плоскости.

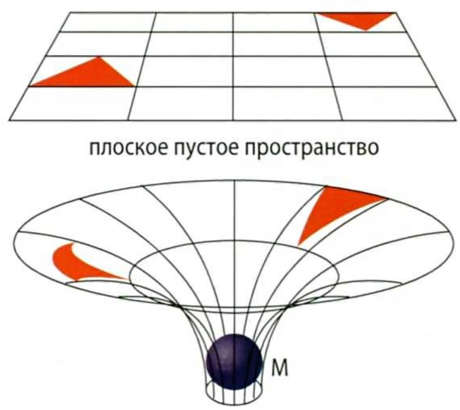
ЭТО ИНТЕРЕСНО

- Так как пятый постулат эквивалентен утверждению «сумма углов треугольника равна двум прямым углам», великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) провел измерения углов треугольников с очень длинными сторонами (при проведении измерений он поднимался на вершину одной из трех гор с теодолитом), однако ему не удалось развеять свои сомнения из-за недостаточной точности измерительных инструментов. По этой причине он назвал новую геометрию, которую первоначально именовал антиевклидовой, звездной геометрией, так как она служила для измерения расстояний между звездами. Однако в итоге он остановился на названии «неевклидова геометрия».

- После продолжительной борьбы с пятым постулатом Фаркаш Вольфганг Бойяи написал своему сыну Яношу письмо, в котором есть такие строки: «Заклинаю тебя от этой потери времени; эта задача лишит тебя веселья, здоровья, отдыха и счастья в жизни». После этого Фаркаш Вольфганг Бойяи посвятил себя поэзии, музыке и драматургии.

Геометрия Вселенной

Бернхард Риман (1826–1866), вдохновленный Гауссом, подошел к вопросу о геометрии пространства с новой стороны, использовав приемы аналитической геометрии. Они не допускали «очевидных истин», которые в действительности могли быть совсем не очевидными. Он создал новую локальную геометрию, введя понятие тензора кривизны, который в евклидовой геометрии равнялся нулю. Важность геометрии Римана неимоверно возросла спустя несколько лет, когда Альберт Эйнштейн описал геометрическую структуру Вселенной в своей общей теории относительности, доказав, что под действием силы тяготения тела движутся по прямым (геодезическим) линиям этой геометрии (см. рисунок внизу справа).



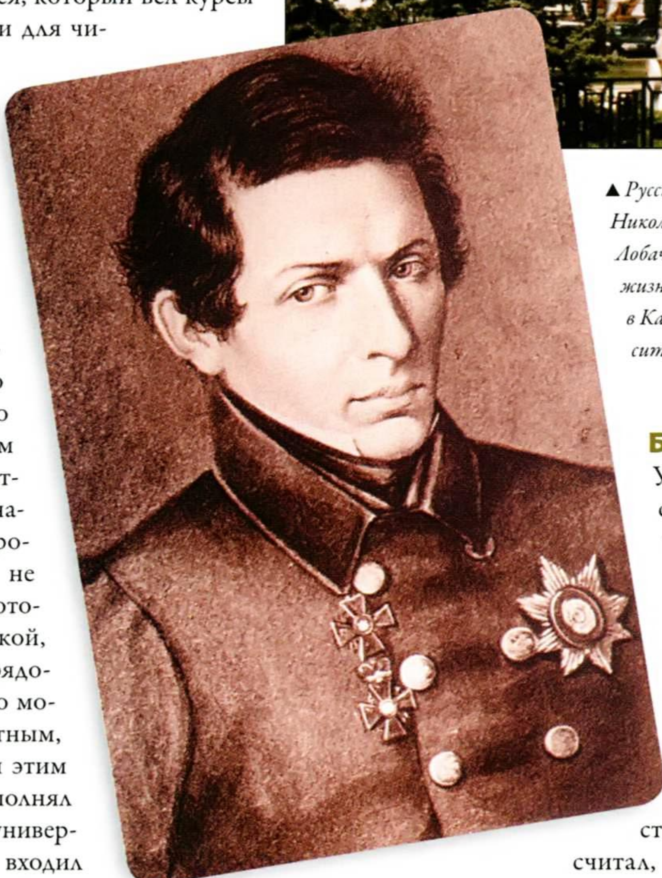
представление криволинейного пространства, деформированного присутствием массы M

Коперник геометрии

Николай Иванович Лобачевский

Николай Иванович Лобачевский родился 2 ноября 1793 года в Нижнем Новгороде в семье со скромным достатком. Его отец, мелкий служащий, умер, когда Николаю было 7 лет, оставив жену, Прасковью Ивановну, и троих детей в бедственном положении. Благодаря усилиям матери все дети были приняты в казанскую гимназию «на казенное содержание». Николай был принят в гимназию в возрасте 8 лет. Благодаря прекрасным способностям ко всем предметам в 14 лет он был зачислен в недавно открытый Казанский университет, в котором проработал до конца жизни. Лобачевский окончил университет в 18 лет, а в 23 года получил должность преподавателя. Ему пришлось заменить заболевшего брата Алексея, который вел курсы элементарной математики для чиновников. Одновременно с этим он преподавал математику студентам. Николай также стал читать курсы физики и астрономии, заменив временно отсутствующего преподавателя. Видя его удивительную работоспособность, руководство университета назначило его также библиотекарем и хранителем университетского музея, который находился в абсолютно заброшенном состоянии. Это не испугало Лобачевского, который лично занялся уборкой, восстановлением и упорядочиванием коллекций. Это может показаться невероятным, но в дополнение ко всем этим должностям он также исполнял обязанности инспектора университета. В его обязанности входил контроль над всеми студентами Казанского университета, в особенности над их политическими идеями. Оценив труды Лобачевского по достоинству, руководство университета назначило его деканом физико-математического факультета.

▲ Русский математик Николай Иванович Лобачевский всю жизнь проработал в Казанском университете, где занимал должности преподавателя, библиотекаря, хранителя музея, декана физико-математического факультета и, наконец, ректора этого высшего учебного заведения.



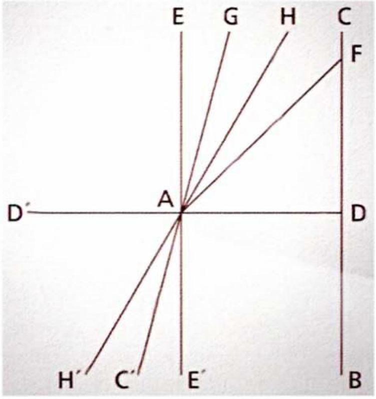
▲ Видный английский геометр Уильям Клиффорд (1845–1879), подчеркивая революционный характер работ Лобачевского (вверху), назвал его Коперником геометрии.

Безмолвный труд

Удивительно, но в этих условиях Лобачевскому хватало времени заниматься математикой. В 1827 году он был избран ректором университета и начал его серьезную реорганизацию: лично подбирал преподавателей и следил за уровнем преподавания, контролировал строительные работы, ремонт лабораторий и постройку астрономической обсерватории. Он даже занялся изучением архитектуры, чтобы строительство шло более эффективно. Лобачевский считал, что невозможно вести реорганизацию и реформы, не располагая полной информацией о предмете.

Лобачевский сломал парадигму, доминировавшую в геометрии на протяжении двух тысяч лет. В своей работе «Новые начала геометрии», опубликованной в 1835 году, он писал:

«Всем известно, что в геометрии теория параллельных до сих пор оставалась несовершенной. Напрасные старания со времен Евклида в продолжении двух тысяч лет заставили меня подозревать, что в самых понятиях еще не заключается той истины, которую хотели доказывать и которую проверить, подобно другим физическим законам, могут лишь опыты, каковы, например, астрономические наблюдения. В справедливости моей догадки будучи наконец убежден и почитая затруднительный вопрос решенным вполне, писал об этом я рассуждение в 1826 году».



◄ *Эту схему Лобачевский приводит в своей работе, опубликованной в 1840 году, при определении параллельности прямых в своей неевклидовой геометрии как граничного случая для двух классов линий: пересекающихся и непересекающихся.*

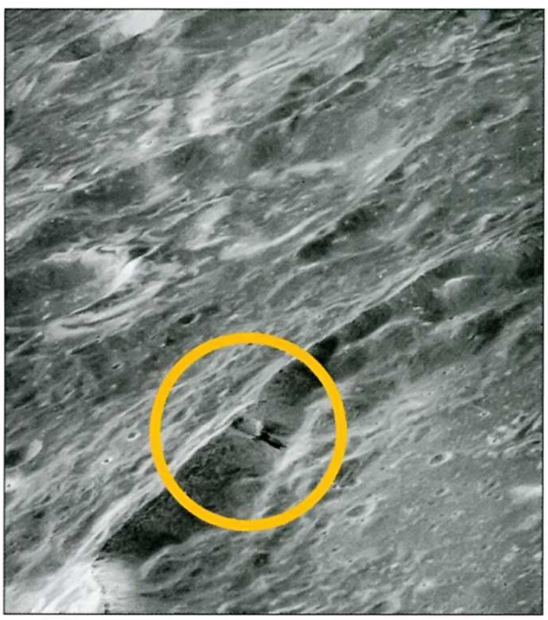
Он работал над созданием новой геометрии больше 20 лет, опубликовав результаты своей работы в 1826 году в «Записках физико-математического отделения» Казанского университета. Однако эта работа осталась незамеченной как в России, так и в Европе, поскольку не была переведена на другие языки. Карл Фридрих Гаусс, один из известнейших математиков того времени, которого наверняка заинтересовали бы труды Лобачевского, узнал о его работе лишь в 1840 году, спустя четырнадцать лет после публикации первой статьи.

▲ *Лобачевский в течение всей жизни отличался удивительной работоспособностью, что позволило ему совмещать несколько должностей в Казанском университете с важными математическими исследованиями, особенно в области неевклидовой геометрии.*

В 1846 году по неизвестным причинам Лобачевский был отстранен от преподавания и освобожден от должности ректора Казанского университета. Несмотря на все протесты друзей и учеников, это решение осталось в силе, и великому математику пришлось покинуть любимый университет, которому он посвятил столько лет.

Пангеометрия

В 1855 году Лобачевский был уже серьезно болен. Несмотря на это, он появился на праздновании 50-летия Казанского университета, где в первый и последний раз был публично зачитан его труд «Пангеометрия», записанный под диктовку учениками тогда уже слепого ученого. В том же году все его труды были переведены на французский язык, однако Лобачевский умер несколькими месяцами ранее, 24 февраля 1856 года, в возрасте 62 лет, так и не узнав о том, какой успех имели его открытия. Полное собрание сочинений Лобачевского было издано только в 1909 году.



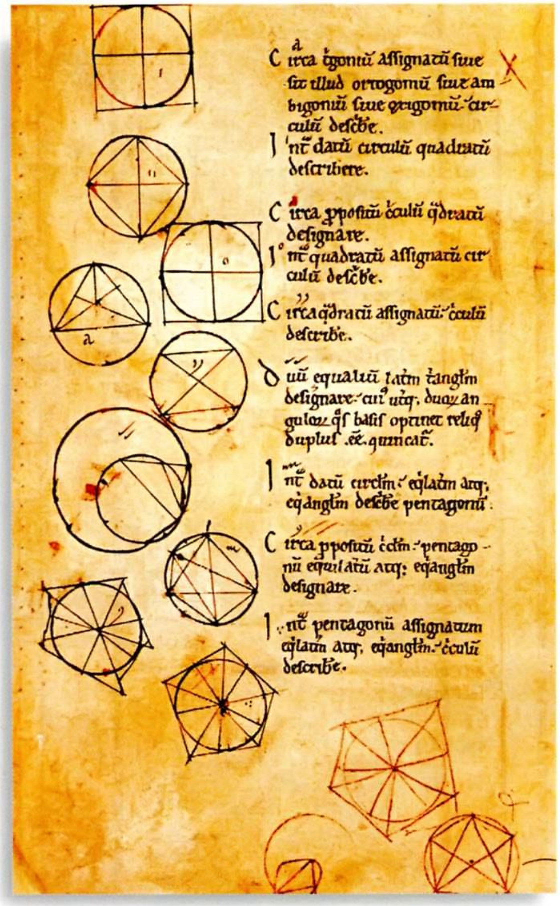
◄ *Слава ждала Лобачевского там, где он не мог и подозревать. Волею судьбы на фотографии лунного кратера, который носит его имя, сделанной с модуля «Аполлон-16», был обнаружен любопытный участок. Хотя этому феномену были найдены научные объяснения, любители НЛО сочли это доказательством визита инопланетян. Эта версия набрала популярность, и имя Лобачевского вновь стало широко известным.*

ЭТО ИНТЕРЕСНО

- Как-то раз член дипломатического корпуса, будучи в Казани с официальным визитом, посетил Казанский университет, где встретил Лобачевского, который в одной рубашке, без галстука и с метлой в руке занимался уборкой и упорядочиванием коллекции. Перепутав его со швейцаром, дипломат попросил продемонстрировать ему коллекцию музея. Лобачевский с радостью провел экскурсию по всему музею. Посетитель был столь удивлен вежливостью и образованностью «швейцара», что предложил ему щедрые чаевые, но Лобачевский с негодованием отказался их принять. Вечером того же дня на торжественном приеме дипломату представили ректора университета, Николая Ивановича Лобачевского. Дипломат был столь потрясен, что едва смог выразить свои извинения.
- В 1830 году в России разразилась эпидемия холеры, которая не обошла Казань стороной. Несмотря на то, что в те годы не было ничего известно о микроорганизмах, Лобачевский предположил, что меры гигиены сыграют важную роль в борьбе с болезнью. Он превратил здание университета в убежище для семей всех его сотрудников. Студенты помогли запечатать двери и окна и строго следили за тем, кто входит в здание, доведя таким образом санитарные меры до крайности. Уровень смертности составил менее 2,5 %, что было абсолютно неслыханным для того времени.

Геометрические задачи античности

Построение с помощью циркуля и линейки



◀ *На рисунке изображена страница «Начал» Евклида, переведенная с арабского на латынь. Вы можете видеть, что в этой книге описываются различные построения с помощью циркуля и линейки.*

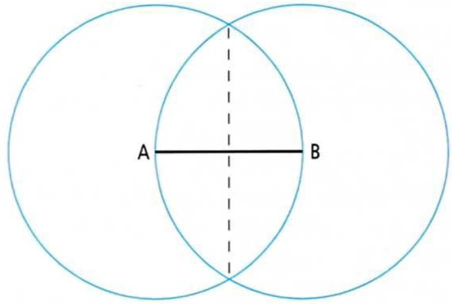
Задачам на построение с помощью циркуля и линейки, известным с античных времен, уделялось большое внимание в Древней Греции. Некоторые из них упоминаются уже в «Началах» Евклида. Сегодня многие преподаватели математики выступают за то, чтобы эти задачи вошли в программу средней школы, так как их образовательная ценность крайне высока. Разнообразие этих задач очень велико: они могут быть очень простыми или суперсложными, а порой и вовсе не имеют решения.

Некоторые простые построения

Рассмотрим два простых примера.

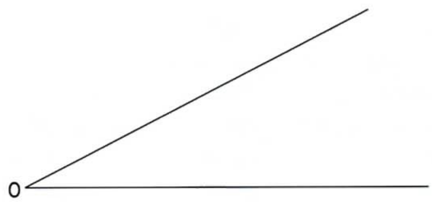
Провести перпендикуляр к отрезку через его середину.

Пусть дан отрезок, концами которого являются точки A и B. Сначала нужно провести окружность с центром в точке A и радиусом AB. Далее нужно построить другую окружность такого же радиуса, но с центром в точке B. Прямая, соединяющая две точки пересечения окружностей, и будет требуемым перпендикуляром

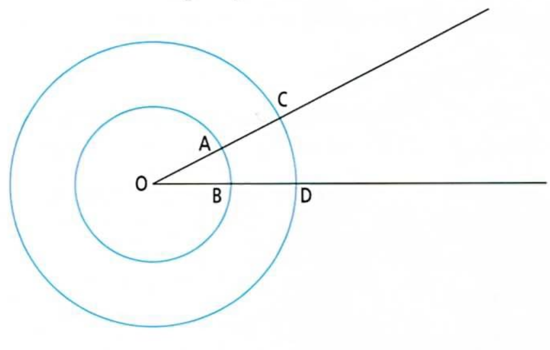


Построить биссектрису произвольного угла.

Напомним, что биссектриса угла — это луч с началом в вершине угла O, который делит угол на две равные части.



Нужно провести две окружности произвольного радиуса с центром в точке O и обозначить точки A, B, C и D — точки пересечения окружностей и сторон угла:



Далее нужно построить отрезки AD и CB.

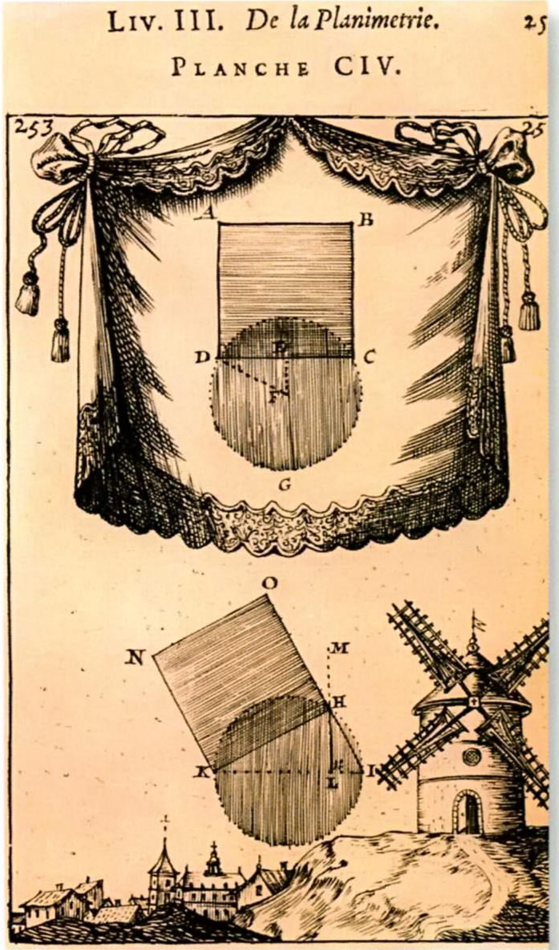
Эти отрезки пересекутся в точке P. Прямая, соединяющая точки O и P, будет искомой биссектрисой.

«Правила игры»

Важно прояснить, что имеется в виду под циркулем и линейкой, так как в противном случае описываемые нами задачи будут решаться тривиально. Найти середину отрезка с помощью линейки, на которую нанесены миллиметровые деления, очень просто. Для этого даже не потребуется циркуль. Дадим определение циркулю и линейке, так как именно от этих определений будут зависеть «правила игры». Линейка — это идеальный предмет с абсолютно ровной границей, который служит для проведения прямых. На линейке отсутствуют какие-либо отметки, позволяющие измерить расстояние. В английском языке такая линейка называется straightedge, а обычная линейка с отметками — rule. Циркуль представляет собой обычный циркуль, который может открываться на любой угол. Логично, что его нельзя использовать для нанесения меток, с помощью которых можно измерить расстояние, так как это эквивалентно наличию линейки с миллиметровыми отметками.

► *В этом трактате по геометрии, опубликованном в 1702 году, описывается попытка найти приближенное значение квадратуры круга. Однако в 1882 году немецкий математик Фердинанд Линдеман доказал, что эту задачу нельзя решить с помощью циркуля и линейки.*

▼ *В труде «Жемчужина философии» (1503) Грегора Рейша описываются различные способы практического применения геометрии в самых разных областях человеческой деятельности, в частности в астрономии (левая часть рисунка) и строительстве (нижняя часть рисунка).*



Квадратура круга

Это самая известная задача из трех античных задач на построение с помощью циркуля и линейки. Квадратурой круга также называют безнадежное и бессмысленное предприятие, которое заведомо обречено на неудачу. При решении этой задачи очень многие совершают распространенную ошибку. Некоторые утверждают, что для вычисления площади круга S достаточно построить квадрат со стороной $\sqrt{S}$. Было бы нелепо полагать, что столь простую задачу много веков не могли решить самые блестящие математики. Дело в том, что нельзя забывать о правилах игры: для решения этой задачи можно использовать только циркуль и линейку; кроме того, нельзя измерять расстояния. Таким образом, задача формулируется так:

«Построить квадрат той же площади, что и данный круг, с помощью циркуля и линейки».

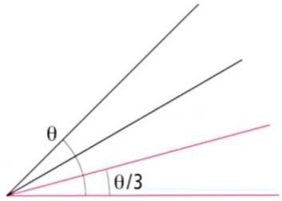
Исходная формулировка этой задачи принадлежит Анаксагору (500 г. до н. э.). Лишь в 1882 году немецкий математик Карл Луи Фердинанд Линдеман (1852–1939) доказал, что число π является трансцендентным, поэтому задача о квадратуре круга не имеет решения.

Трисекция угла

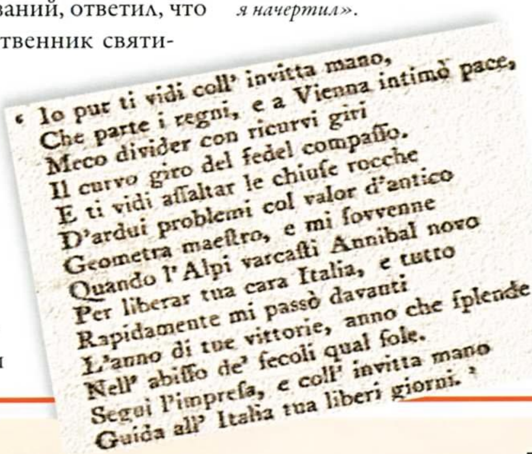
Эта задача — самая простая из трех, поэтому ее пытаются решить чаще всего. Задача звучит так:

> «Разделить с помощью циркуля и линейки произвольный угол θ на три равных угла».

В 1836 году французский математик Пьер Ванцель посредством алгебраических методов доказал, что эту задачу нельзя решить с помощью циркуля и линейки.



▼ *Математик Лоренцо Маскерони посвятил Наполеону поэму «Бонапарту итальянскому» (внизу), которая включена в его труд Geometria del compasso. Первые строки поэмы звучат так: «...я видел, как ты, // царства деливший, тот, кто Вене мир заключил, // делил со мною кривыми // дуги, что циркулем я начертил».*


« Io pur ti vidi coll' invitta mano,
Che parte i regni, e a Vienna intimò pace,
Meco divider con ricurvi giri
Il curvo giro del fedel compaffo.
E ti vidi affaltar le chiufe rocche
D'ardui problemi col valor d'antico
Geometra maeftro, e mi fovvenne
Quando l'Alpi varcafti Annibal novo
Per liberar tua cara Italia, e tutto
Rapidamente mi passò davanti
L'anno di tue vittorie, anno che fplende
Nell' abiffo de' fecoli qual fole.
Segui l'imprefa, e coll' invitta mano
Guida all' Italia tua liberi giorni. »

Удвоение куба

Задача об удвоении куба также называется делийской задачей, так как с ней связана античная легенда. В 431 году до н. э. в Аттике разразилась эпидемия чумы. Жители острова, будучи не в силах справиться с болезнью, отправили посланников к дельфийскому оракулу. Оракул, который славился неоднозначностью предсказаний, ответил, что нужно построить новый жертвенник святилища, в два раза больше, чем предыдущий. Жители Делоса обрадовались, так как задача совсем не выглядела непосильной. Жертвенник представлял собой куб достаточно скромных размеров. Жители Делоса построили куб, длина ребер которого была в два раза больше, чем длина ребер исходного куба. Когда работы были закончены, эпидемия чумы не только не прекратилась, но напротив, привела к гибели почти половины жителей острова. Жертвой эпидемии стал даже сам Перикл.

Неужели оракул ошибся? Вовсе нет. Была допущена ошибка в расчетах. Если ребро исходного куба имело длину a, то его объем равнялся a^3. Новый жертвенник имел объем $(2a)^3 = 8a^3$, то есть был в восемь раз больше старого, а не в два, как потребовал оракул.

Если оставить легенды в стороне, делийская задача (задача об удвоении куба) звучит так:

> «Построить с помощью циркуля и линейки куб, объем которого в два раза больше объема данного куба».

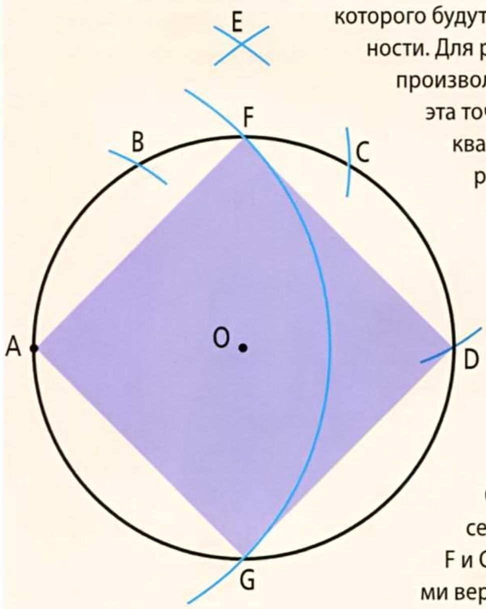
Первую попытку доказать невозможность решения этой задачи предпринял французский математик Рене Декарт в 1637 году.

«Заржавевший циркуль»

Разумеется, древним грекам были доступны и другие инструменты для построения геометрических фигур, помимо циркуля и линейки. Им даже был известен инструмент для трисекции угла. Необходимость использовать только циркуль и линейку была продиктована соображениями «элегантности» и стремлением открыть новые пути

Задача Наполеона

В число многочисленных интересов Наполеона Бонапарта, помимо завоевания новых земель, входило построение геометрических фигур с помощью циркуля и линейки. Один из его почитателей, итальянский математик Лоренцо Маскерони, с которым Наполеон подружился в 1796 году, посвятил ему интересную геометрическую задачу: построить квадрат, все четыре вершины которого будут расположены на данной окружности. Для решения задачи нужно выбрать произвольную точку A на окружности; эта точка будет первой вершиной квадрата. Далее нужно отложить радиус круга от точки A в точку B, от точки B в точку C, от точки C в точку D. Точка D будет второй вершиной искомого квадрата. Далее с помощью циркуля нужно провести дуги окружности радиуса AC с центрами в точках A и D. Эти дуги пересекутся в точке E. Если провести окружность радиуса OE с центром в точке A, она пересечет данную окружность в точках F и G. Эти точки и будут недостающими вершинами квадрата.



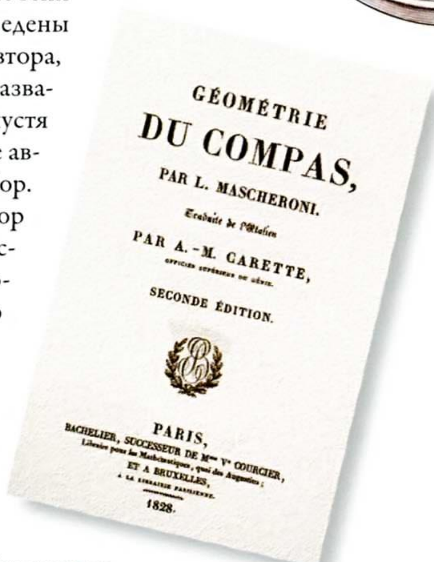

EUCLIDES DANICUS,
Bestaande udi Too Deele.
Dend Forste Deel : Handler udaf de Ser
Dend Anden Deel : Giffver Anledning At-
Forestillet.
Af
Georg Mohr.

◄ *Датский математик Георг Мор — автор книги Euclides danicus, вышедшей в 1672 году. В этой книге, которая долгое время была забыта и заново опубликована в переводе на немецкий язык в 1928 году, содержится доказательство того, что все построения с помощью циркуля и линейки сводятся к построениям с помощью циркуля.*

в геометрии. Со временем были введены и другие подобные ограничения. Одно из самых знаменитых ограничений ввел в X веке геометр Абу-л-Вафа, который предложил задачи на построение с помощью линейки и циркуля, раствор которого изменять нельзя (поэтому он в шутку назвал его заржавевшим циркулем). Построения с помощью такого циркуля поистине гениальны. Большинство из них приведены и доказаны в книге неизвестного автора, опубликованной в 1673 году под названием Compendis Euclidis Curiosi. Спустя несколько лет стало известно, что ее автором был датский геометр Георг Мор. Французский математик Жан-Виктор Понселе выдвинул гипотезу, согласно которой любое построение, которое можно выполнить с помощью линейки и обычного циркуля, также можно выполнить с помощью линейки и циркуля с фиксированным раствором. Эта гипотеза была доказана в XIX веке Якобом Штейнером.

Одно из величайших открытий, связанных с задачами такого типа, было совершено в 1794 году, когда итальянский геометр Лоренцо Маскерони в своей работе Geometria del Compasso доказал, что любое построение, которое можно выполнить с помощью циркуля и линейки, также можно выполнить только с помощью циркуля (разумеется, раствор которого не фиксирован). Так как провести прямую с помощью циркуля невозможно, Маскерони считал, что две точки, заданные пересечением дуг, определяют прямую.

Однако окончательное доказательство этому приводится в работе Эвариста Галуа, который придал задачам на построение максимальную строгость и доказал в общем виде возможность или невозможность подобных построений. Галуа был первым, кто определил критерии возможности подобных построений на языке алгебры. Методы, использованные им при доказательстве, далеки от геометрии и относятся к алгебре и теории чисел.


GÉOMÉTRIE
DU COMPAS,
PAR L. MASCHERONI.
Traduite de l'Italien
PAR A.-M. CARETTE,
SECONDE ÉDITION.
PARIS,
BACHELIER, SUCCESSEUR DE Mme Ve COURCIER,
ET A BRUXELLES,
1828.

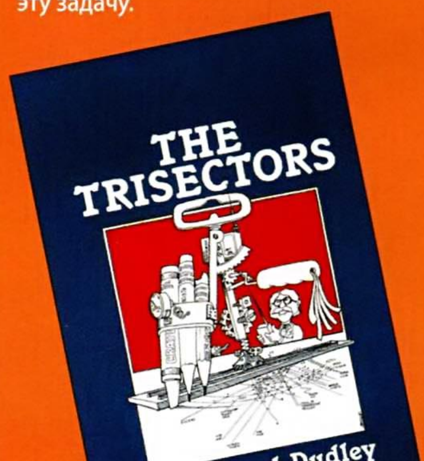
▲ *Обложка второго издания Geometria del Compasso Маскерони на французском языке, опубликованного в Париже в 1828 году.*

► *Несмотря на невозможность решения задачи о трисекции угла с помощью циркуля и линейки, многие по-прежнему предпринимают попытки решить ее. Об этом рассказывает А. Дадли в своей книге The Trisectors («Трисекторы») — именно так он в шутливой форме называет тех, кто пытается решить эту задачу.*

ЭТО ИНТЕРЕСНО

- Задачи на построение с помощью циркуля и линейки всегда занимали почетное место среди занимательных задач. Один из наиболее любопытных сборников подобных задач был написан землемером Уильямом Лейбурном (его портрет изображен на рисунке слева). В 1964 году он опубликовал книгу Pleasure with Profit («Доходное удовольствие»), в которой изложил всевозможные математические игры с «линейкой и вилами». Под вилами имелся в виду циркуль с фиксированным раствором.

- Многие до сих пор упорно пытаются решить задачи о квадратуре круга, об удвоении куба и в особенности о трисекции угла с помощью циркуля и линейки. Последняя задача традиционно привлекает наибольшее внимание, возможно, из-за кажущейся простоты формулировки. Число предлагаемых решений задачи о трисекции угла исчисляется сотнями. Эти объемные и подробные геометрические труды обречены на сокрушительный провал. Многие из этих «решений» запатентованы. Не так давно Европейская патентная организация официально прекратила прием патентных заявок, связанных с решением этой задачи. Однако мир по-прежнему полон непризнанных гениев, которым якобы удалось решить эту задачу.



Стол был сервирован как для банкета с той лишь разницей, что вместо привычных приборов на нем были разложены письменные принадлежности.

Узелок 10
Пирожки (часть вторая)

Пирожки, пирожки, горячие пирожки!

— Добро пожаловать, м'м, милости просим! — приветствовал тетушку представительный дворецкий. (Заметим кстати, что произнести подряд три «м», не вставив между ними ни единого гласного, может далеко не всякий. Это под силу лишь дворецкому, искушенному во всех тонкостях своей профессии.) — Вас уже ожидают в библиотеке. Полный аншлаг!

— Как он смеет говорить о твоем отце «дуршлаг», да к тому же «полный»! — негодующе прошипела на ухо племяннице Безумная Математильда, когда они пересекали просторную гостиную. — Да нет же, тетя, он просто хотел сказать, что все в сборе, — едва успела прошептать в ответ Клара, как дворецкий ввел их в библиотеку. При виде открывшегося перед ней зрелища Клара лишилась дара речи. За столом в торжественном молчании замерли пять человек: Хью, Ламберт, Норман и Бальбус.

Во главе стола восседал отец. Не нарушая тишины, он молча указал Кларе и Безумной Математильде на пустые кресла справа и слева от себя. Стол был сервирован как для банкета с той лишь разницей, что вместо привычных приборов на нем были разложены письменные принадлежности. По всему было видно, что дворецкий вложил много выдумки в эту злую шутку. Вместо тарелок перед каждым из присутствовавших был положен лист бумаги, вместо ложки и вилки слева и справа от каждого прибора лежали ручка с пером и карандаш. Роль ломтика хлеба исполняла перочистка, а там, где обычно стоит бокал для вина, красовалась чернильница. Украшением стола — главным блюдом — служила обтянутая зеленым сукном шкатулка. Когда пожилой джентльмен, сидевший во главе стола, встряхивал ее, а делал он это беспрерывно, она издавала мелодичный звон, словно внутри ее находилось бесчисленное множество золотых гиней. — Сестра! Дочь моя! Сыновья! И... и Бальбус! — начал пожилой джентльмен столь неуверенно, что Бальбус счел необходимым заявить о полном согласии со сказанным, а Хью — забарабанить кулаками по столу. Столь лестные знаки внимания окончательно сбили с толку неопытного оратора. — Сестра! — начал он снова, затем помолчал и, встряхнув шкатулку, продолжил с лихорадочной поспешностью: — Сегодня я... некоторым образом... э... собрал вас... э... по поводу знаменательного события... В этом году... одному из моих сыновей исполняется... — и тут он снова умолк в полном замешательстве, ибо достиг середины речи намного раньше намеченного времени, но возвращаться было уже поздно. — Совершенно верно! — воскликнул Бальбус. — Вот именно! — ответствовал пожилой джентльмен, который понемногу начал приходить в себя. — Мысль о том, чтобы ежегодно дарить каждому из сыновей столько гиней, сколько лет ему исполняется в текущем году, пришла мне в голову в весьма знаменательное время. Надеюсь, мой друг Бальбус поправит меня («Еще как поправит! Ремнем!» — прошептал Хью, но его никто не услышал, кроме Ламберта, который нахмурился и укоризненно покачал головой), если я ошибаюсь. Так вот, эта мысль, повторяю, пришла мне в голову именно в тот год, когда, как сообщил мне Бальбус, сумма возрастов двух из вас была равна возрасту третьего. По этому случаю, как вы все, конечно, помните, я произнес речь... Бальбус счел, что настал подходящий момент для того, чтобы вставить несколько слов, и начал: — Это была самая... — Произнес речь... — уколол его предостерегающим взглядом пожилой джентльмен. — Несколько лет назад Бальбус сообщил мне... — Совершенно верно, — подтвердил Бальбус. — Вот именно, — кивнул благодарный оратор и продолжил: — ... Я говорю, Бальбус сообщил мне о другом не менее знаменательном событии — что сумма возрастов двух из вас в тот год оказалась вдвое больше возраста третьего. По этому поводу я тоже произнес речь, — разумеется, не ту, что в первом случае. В этом году — как утверждает Бальбус — мы присутствуем при третьем знаменательном событии, и я... (тут Безумная Математильда многозначительно посмотрела на часы) ...я тороплюсь изо всех сил, — воскликнул пожилой джентльмен, демонстрируя ясность духа и полное самообладание, — и перехожу к существу дела. Число лет, протекших со времени первого знаменательного события, составляет ровно две третьих от числа гиней, которые я вам тогда подарил. Мальчики! Пользуясь этими данными, вычислите свой возраст, и вы получите от меня ежегодный подарок! — Но мы и так знаем свой возраст! — воскликнул Хью.

— Замолчите, сэр! — вне себя от негодования вскричал отец, выпрямляясь во весь рост (составлявший ровно пять футов и пять дюймов). — Я сказал, что при решении вы имеете право пользоваться только данными задачи, а не гадать о том, сколько кому лет.

— Ты также получишь от меня такой же подарок, как мальчики, если сумеешь решить задачу, — шепнула Безумная Математильда племяннице и вышла вслед за братом.

Решение

ЗАДАЧА О ВОЗРАСТЕ СЫНОВЕЙ

Условие

Некогда сумма возрастов двух сыновей была равна возрасту третьего сына. Через несколько лет сумма их возрастов стала равна удвоенному возрасту третьего сына. Когда число лет, прошедших с тех пор, когда сумма возрастов двух сыновей была равна возрасту третьего, составит 2/3 от суммы возрастов всех трех сыновей, третьему сыну исполнится 21 год. Сколько лет будет двум другим сыновьям?

Ответ

15 и 18 лет.

Решение

Обозначим возраст сыновей в момент первого знаменательного события x, y, $(x + y)$. Заметим, что если $a + b = 2c$, то $(a - n) + (b - n) - 2(c - n)$ при любых n. Следовательно, последнее соотношение, коль скоро оно выполняется хоть когда-нибудь, выполняется всегда, в частности в момент первого знаменательного события. Но по условию задачи сумма возрастов двух сыновей (x и y) в этот момент равна возрасту третьего и, следовательно, не может быть вдвое больше возраста третьего $(x + y)$. Следовательно, условие должно выполняться для суммы возраста третьего сына $(x + y)$ и возраста какого-нибудь из первых двух сыновей, то есть x или y (какого именно, безразлично).

Предположим, например, что $x + y + x = 2y$, тогда $y = 2x$. Таким образом, в момент первого знаменательного события возрасты сыновей образуют арифметическую прогрессию x, $2x$, $3x$, а число лет, прошедших с тех пор, составляет 2/3 от $6x$, то есть равно $4x$. Итак, в момент, когда отец произносил свою последнюю торжественную речь, его сыновьям исполнилось по $5x$, $6x$ и $7x$ лет. Возраст любого из сыновей выражается целым числом. Об этом свидетельствует то место в речи отца, где говорится: «В этом году одному из моих сыновей исполняется…». Поэтому $7x = 21$, $x = 3$, $5x = 15$ и $6x = 18$.

Перо бессильно передать, с какой торжественностью встали из-за стола брат и сестра. Мог ли, спрашиваем мы, отец хитро улыбнуться в такую минуту при виде своих удрученных сыновей? Могла ли, спрашиваем мы, тетушка лукаво подмигнуть своей приунывшей племяннице? Были ли похожи на сдавленный смех те звуки, которые раздались, когда Бальбус, выйдя из комнаты вслед за хозяином дома и его сестрой, прикрывал за собой дверь? Нет, нет и нет! И все же дворецкий рассказал потом кухарке, что... Впрочем, не станем же мы повторять всякие сплетни.

Ночные тени сжалились над молчаливой мольбой несчастных и «не сомкнулись над ними» (поскольку дворецкий внес лампу). «Во тьме ночной (те же услужливые тени, но в концентрированном виде) было слышно порой, как где-то залает собака» (на заднем дворе всю ночь напролет пес выл на луну). Но ни «когда утро настало», ни позже сестра и трое братьев «не воспрянули духом» — они так и не смогли обрести былое душевное спокойствие, навсегда покинувшее их после того, как все эти задачи обрушились на них и увлекли на путь нескончаемых страданий.

— Вряд ли честно, — пробормотал Хью, — задавать нам такие головоломные задачи.

— Нечего сказать — честно! — с горечью подхватила Клара. Всем моим читателям я могу лишь повторить слова Клары и честно признаться:

— Больше мне сказать нечего! До свиданья!

МОЕЙ ЛЮБИМОЙ УЧЕНИЦЕ

Друг мой! Знаешь ты уже
Вычитанье и сложе-,
Умноже-нье и деленье
Просто всем на удивленье.
Так дерзай! Пусть славы эхо
О твоих гремит успехах.
Станешь ты, хоть скромен вид,
Знаменитей, чем Евклид!

Льюис Кэрролл

Треугольный солитер, правила которого наверняка знакомы вам по многим известным играм, содержит немало интересных и необычных задач.

Игра со множеством решений
Треугольный солитер

Многие игры существуют в большом количестве вариантов и версий. Некоторые из них благодаря их новизне и оригинальности по праву можно назвать отдельными играми. Такой игрой является треугольный солитер, который отличается от обычной игры солитер тем, что доска имеет треугольную форму, из-за чего в игре возникает множество новых и интересных ситуаций. Цель и правила игры ничем не отличаются от цели и правил обычного солитера.

◄ Цель игры треугольный солитер заключается в том, чтобы найти решение для всех возможных начальных положений шариков на игровом поле. Каждому начальному положению соответствует множество решений. Особо выделяются те решения, где последний шарик остается в ячейке, которая изначально была пустой. Особый интерес также представляют решения, в которых последний шарик остается в одной из трех центральных ячеек.

История о прыжках

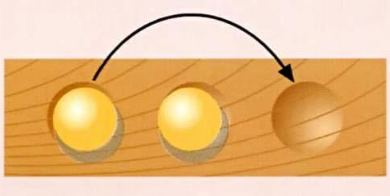
По классификации головоломок Джерри Слокума треугольный солитер относится к головоломкам с последовательным перемещением элементов.

Первой из подобных игр является древняя настольная игра халма (от греческого «прыжок»). Халма также лежит в основе китайских шашек. Правила треугольного солитера таковы: фишки можно перемещать в любую соседнюю клетку; чтобы убрать фишку с поля, через нее нужно перепрыгнуть другой фишкой. Среди множества игр с такими правилами выделяется игра Сэма Лойда «Who will get the nomination?», созданная в 1908 году к очередным президентским выборам в США. На игровом поле 5 × 5 располагались девять фишек с портретами кандидатов. Согласно правилам, нужно было убрать с доски восемь фишек и оставить одну с портретом выбранного кандидата.

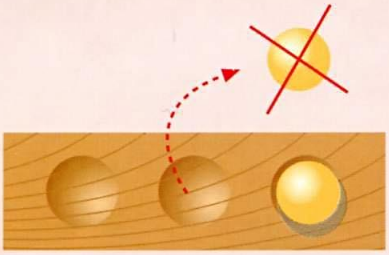
Первое упоминание об игре солитер принадлежит Готфриду Вильгельму Лейбницу (1646–1716), который подробно изучил ее и сформулировал несколько интересных задач для традиционной версии и для версии с треугольной доской.

Правила игры

На доске с 15 ячейками расположено 15 шариков. Цель игры — убрать с доски все шарики, кроме одного. В начале игры нужно удалить один из шариков, выбранный произвольно. Далее нужно выбрать один из шариков и перепрыгнуть соседний так, чтобы занять пустую ячейку.



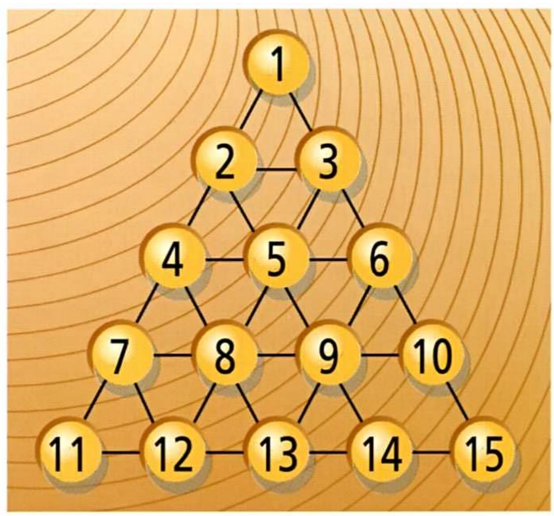
Шарик, через который мы перепрыгиваем, убирается с доски.



Этот ход всегда выполняется по прямой линии, параллельной одной из сторон треугольника. Если мы, например, уберем шарик в одной из вершин игрового поля, то можно будет сделать один из двух возможных ходов, которые являются симметричными.

Обозначения и симметрия

На рисунке приведены обозначения, которые мы будем использовать далее при всех объяснениях.



Так как в начале игры нужно убрать с доски один из шариков, существует 15 возможных исходных позиций. Однако с учетом симметрии и поворотов остается всего четыре начальные позиции.

Начальная позиция 1: равносильна 11 и 15.

Начальная позиция 2: равносильна 3, 7, 10, 12 и 14.

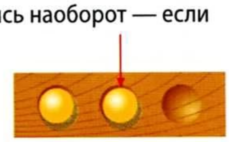
Начальная позиция 4: равносильна 6 и 13.

Начальная позиция 5: равносильна 8 и 9.

Дополнения Лейбница

Лейбниц, которому очень нравилась игра солитер и который глубоко изучил ее, создал обратный вариант игры, где требовалось получить исходную позицию из конечной. Прыжки совершались наоборот — если шарик перепрыгивал через пустую ячейку в следующую, также пустую, то в ту ячейку, через которую был совершен прыжок, ставился шарик. И в исходной, и в обратной версии игры при прыжке создается положение, «дополняющее» исходное (пустую ячейку занял шарик, а ячейка, где находился шарик, осталась пустой). Существует множество интересных игр на доске треугольного солитера, в которых используются обратные ходы и дополняющие позиции (см. раздел «Ссылки с дополнительной информацией»).


исходная позиция


финальная позиция

Некоторые примечательные решения

Ходы обозначаются двумя числами, разделенными косой чертой. Первое число обозначает ячейку, из которой нужно переместить шарик, второе — ячейку, куда совершается прыжок. Во всех решениях последний шарик занимает ячейку, которая в начальной позиции была пустой. Подсчет общего числа решений для каждого случая был выполнен Биллом Батлером с помощью компьютера.

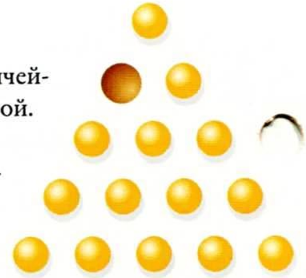
Пустая ячейка в позиции 1.
Если пустая ячейка расположена в одной из вершин треугольника, существует 29 760 последовательностей ходов, в результате которых на доске остается единственный шарик. В 6816 из этих решений последний шарик занимает ячейку, которая изначально была пустой. Ниже приведено одно из этих решений:

6/1 — 13/6 — 15/13 — 12/14 — 10/3 — 4/13 — 14/12 — 11/13 — 3/8 — 1/4 — 7/2 — 13/4 — 4/1.

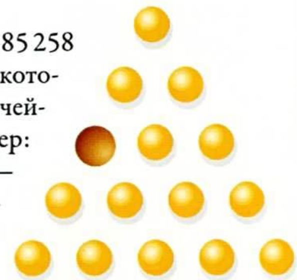
Пустая ячейка в позиции 2.
Для этой позиции существует 14 880 последовательностей ходов, в результате которых на доске остается единственный шарик. Всего в 720 из них последний шарик занимает ячейку, которая изначально была пустой.

Пример:

7/2 — 13/4 — 15/13 — 12/14 — 6/13 — 14/12 — 11/13 — 2/7 — 1/6 — 10/3 — 3/8 — 13/4 — 7/2.



Пустая ячейка в позиции 4.
Для этой позиции существует 85 258 различных решений, в 51 452 из которых последний шарик занимает ячейку, изначально пустую. Например: 13/4 — 15/13 — 12/14 — 10/8 — 7/9 — 6/13 — 14/12 — 11/13 — 3/8 — 2/7 — 13/4 — 7/2 — 1/4.



Пустая ячейка в позиции 5.
Если пустая ячейка находится в центре доски, то решения будут отличаться от остальных. Так, если изначально пустой является ячейка 5, то во всех решениях последний шарик будет занимать ячейку 13. Для этой позиции существует 1550 различных решений. Приведем одно из них в качестве примера: 14/5 — 12/14 — 7/9 — 10/8 — 3/10 — 15/6 — 2/7 — 6/4 — 7/2 — 1/4 — 4/13 — 14/12 — 11/13.

▶ *В таблице приведено число решений головоломки треугольный солитер, рассчитанное Биллом Батлером с помощью компьютера.*

Исходная пустая ячейка	Общее число решений	Последний шарик занимает исходную пустую ячейку
1	29 760	6 816
2	14 880	720
3	14 880	720
4	85 258	51 452
5	1 550	0
6	85 258	51 452
7	14 880	720
8	1 550	0
9	1 550	0
10	14 880	720
11	29 760	6 816
12	14 880	720
13	85 258	51 452
14	14 880	720
15	29 760	6 816
Итого	**438 984**	**179 124**


18 17 3
11 8 7 19
9 6 5 4 16
14 1 2 12
15 10
13

В следующем выпуске через 2 недели

Спутник

Игра «Жизнь»

Автоматы, имитирующие природу

Удивительный философ, математик и писатель

Бертран Рассел

Замощения

Как замостить плитками всю Вселенную?

Лучшее от Сэма Лойда

Новые арифметические и алгебраические задачи

Спрашивайте в киосках!

16+